



**Projet INCO-WADEMED**  
Actes du Séminaire  
Modernisation de l'Agriculture Irriguée  
Rabat, du 19 au 23 avril 2004



## **Modélisation et pilotage automatique de l'écoulement d'eau en zone non saturés**

A. Lakhal, G.Boulet, E.K. Lakhal, A.Chehbouni J.Ezzahar, S.Er-raki et  
R.Hadria

*FSSM, Faculté des Sciences Semlalia, Université Cadi ayad, Marrakech, Maroc.*

E-mail : [a.lakhal@ucam.ac.ma](mailto:a.lakhal@ucam.ac.ma)

**Résumé** - Dans ce article on se propose de déterminer la dynamique de l'eau dans un sol non saturée à l'aide de deux méthodes différentes. La première méthode est conduite à l'aide de la résolution de l'équation d'infiltration transitoire fortement non linéaire et faisant appel à la méthode des différences finies sous des conditions bien définies. La seconde méthode suppose le sol comme étant constitué d'un ensemble de réservoirs successivement répartis en cascade et de caractéristiques connues. Les résultats obtenus à l'aide de cette nouvelle méthode, en terme du stock d'eau, montrent la bonne concordance avec ceux obtenus par le modèle de Richards et ce pour plusieurs types de sols. Enfin, on étudie la sensibilité du modèle proposé en faisant varier la hauteur des réservoirs, le débit d'arrosage et les caractéristiques hydrodynamiques des sols. Une dernière tentative de comparaison avec les résultats expérimentaux in situ réalisés dans le centre des techniques et de pilotage d'irrigation de Saada est conduite avec succès.

*Mots clés : Modélisation, identification, bilan hydrique, réservoirs, simulation numérique, sensibilité.*

### **1 Introduction**

Au cours des dernières décennies, l'intensification des activités agricoles et l'utilisation féroce des fertilisants entraîne la surexploitation et la dégradation des ressources en eau. En fait, l'irrigation et la fertigation appliquées à des taux supérieurs au besoin des plantes et à des dates non convenables, peuvent être transportés vers la nappe phréatique. Ainsi, le suivi de l'évolution du stock hydrique dans la zone racinaire reste un facteur très important non seulement pour la protection de la nappe, mais aussi pour la croissance des plantes et la bonne gestion de l'irrigation. Cet important volet de recherche scientifique a reçu une attention particulière justifiée par les différentes applications incluant notamment la gestion des nappes phréatiques, le transfert d'eau et de soluté en milieu agricole, etc... Pour cette dernière application, notre but est focalisé essentiellement sur l'optimisation des doses et des fréquences des irrigations. Généralement, ces écoulements sont régis par une équation aux dérivées partielles de type parabolique fortement non linéaire. A ce propos, les travaux expérimentaux permettent d'apporter une très grande précision sur le mouvement d'eau mais ils restent limités en raison de la complexité de leur réalisation marquée par un coût très élevé. La voie analytique représente l'un des moyens le plus

efficace pour la prédiction de ces mouvements. Cependant, elle reste très loin d'être utilisée en raison des conditions très particulières imposées sur l'écoulement et qui s'écartent très visiblement de la réalité. En guise de ces travaux, les essais numériques semblent les plus appropriés en raison du temps record d'obtention des solutions et de leur approche très visible de la réalité de l'écoulement. A ce propos, les travaux réalisés montrent que les résultats de la simulation numérique du problème étudié dépendent de la façon de calculer, à chaque pas de temps, les paramètres non linéaires aux différents nœuds du domaine. Ainsi, le choix d'une méthode fiable qui engendre le moins possible de perturbations numériques est indispensable lorsqu'on introduit les effets des paramètres non linéaires intervenant dans l'écoulement. L'existence de ces perturbations engendrerait donc de fausses informations sur le phénomène physique étudié pouvant même affecter le comportement global de la solution.

En raison du caractère fortement non linéaire des régions insaturées limitant celles qui sont entièrement saturées et de la non conservation de la masse pour les équations de pression basées sur les différences finies et sur les éléments finis, la convergence et la stabilité continuent d'être le souci, Hornberger et al. (1969[13]). Récemment, la méthode mixte de l'équation de Richards utilisant les itérations de Picards modifiées et la résolution par pré condition conjugale du gradient ont apporté beaucoup d'améliorations pour estimer les fronts d'humidité descendant, Bouloutas (1989[4]).

A la lumière de cette large disponibilité des méthodes de résolution de l'équation d'infiltration, il semble que les problèmes de stabilité et de convergence demeurent présents. L'objectif principal de cette étude est de présenter une nouvelle méthode d'estimation du stock d'eau dans le sol. Dans cette approche, le sol est supposé comme un ensemble de réservoirs successivement répartis en cascade. Par la suite, on se propose de comparer les performances de ce modèle par rapport à celles de l'équation de Richards résolue à l'aide de la méthode de bilan local, Haverkamp et al. (1983[11]). Cette démarche permettra d'apporter une correction sur l'estimation des réserves utiles dans le sol d'une part et de calculer une loi de commande du débit appliqué à la surface du sol pour maintenir ou ramener son stock d'eau à une valeur désirée (humidité à la capacité au champ et au point de flétrissement). Pour s'assurer de la fiabilité du modèle proposé, nous l'avons testé sur trois types de sol ayant des caractéristiques hydrodynamiques très variées.

## 1.1 Présentation du modèle réservoirs

Le but d'introduire cette approche est de pouvoir simuler l'évolution spacieux- temporelle du stock d'eau dans le sol sans passer par la résolution de l'équation de Richards. Ainsi, l'utilisation simplifiée de ce modèle permettra de contrôler le stock hydrique du sol sous la présence d'une culture donnée afin d'arriver à l'optimisation des apports d'eau et de dresser un calendrier d'irrigation. Le modèle, considère le sol comme étant une succession de réservoirs disposés en cascades [3]. Après avoir divisé la colonne de sol en plusieurs tranches (figure 1), on procède au calcul du stock au moyen d'un système d'équations linéaires.

Pour cette nouvelle formulation, le  $i^{\text{ème}}$  tranche du sol est caractérisé par les coefficients :  $S_{i0}$ , le stock d'eau minimum qu'il doit contenir avant de communiquer avec le suivant. A noter que le temps ( $t_i$ ) pour lequel  $S(t) = S_{i0}$  représente celui de la rétention de la  $i^{\text{ème}}$  tranche du sol. Le modèle découpe l'évolution du stock d'eau dans chaque réservoir en 3 phases : la première phase le stock d'eau égale le stock initial du réservoir (ie : l'eau n'est pas encore arrivée à cette section), la deuxième est un intégrateur de première ordre qui explique le remplissage linéaire du réservoir durant le temps de rétention, la troisième est un intégrateur de deuxième ordre qui traduit le remplissage d'un réservoir en communiquant avec le suivant [19](figure 2).

( $L, q_e, S_i, S_{i0}, q_i$  et  $q_{i-1}$  sont respectivement la profondeur de la colonne du sol considéré, le débit appliqué à la surface du colonne, le stock d'eau à l'instant  $t$  dans le  $i^{\text{ème}}$  réservoir, le stock

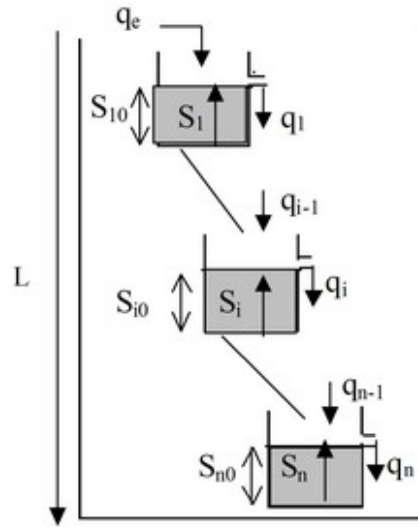


FIG. 1 – Modèle Réservoirs

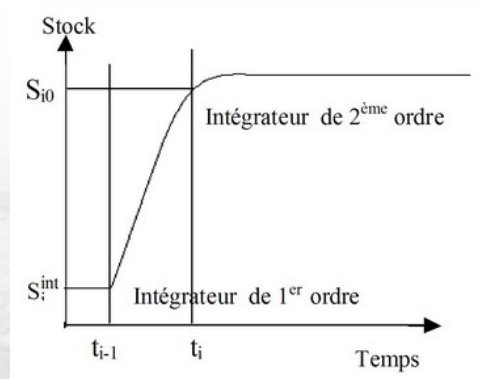


FIG. 2 – Découpage de la série temporelle de la variation du stock d'eau en 3 phases successive d'écoulement.

minimal que doit atteindre le réservoir (i) avant de verser dans le (i+1)<sup>ème</sup> réservoir, le débit à la sortie et à l'entrée du i<sup>ème</sup> réservoir).

## 1.2 Mise en équation d'une colonne de sol :approche par réservoirs

La variation temporelle du stock d'eau dans le i<sup>ème</sup> réservoir n'est autre que le bilan massique suivant :

$$\frac{dS(t)}{dt} = q_{i-1}(t) - q_i(t) \quad (1)$$

Cette équation exprime la différence entre le débit à travers la surface supérieure et celui sortant à travers la surface inférieure de la tranche du sol sous l'effet de la gravité.

L'ensemble des équations exprimant la dynamique de l'eau dans le sol est donné par l'intégration de l'équation 1, en considérant que, pendant la phase 1 ( $t < t_{i-1}$ ) l'eau n'est pas encore arrivé à humidifier la i<sup>ème</sup> tranche du sol et le stock d'eau est égale le stock initiale  $S_i^{init}$ . Entre les instants  $t_{i-1}$  et  $t_i$ , la i<sup>ème</sup> tranche n'est en interaction qu'avec la (i-1)<sup>ème</sup> tranche, ainsi le débit ( $q_i$ ) à la sortie de cette tranche est nul et le comportement dynamique est réduit à un système intégrateur de première ordre. Au delà de l'instant de rétention  $t_i$  la tranche continu à remplir en communiquant avec la tranche suivante, le système se comporte à un intégrateur de 2<sup>ème</sup> ordre. En utilisant la transformé de Laplace les équations dynamique du modèle deviennent :

$$\begin{cases} t \leq t_{i-1} & S_i(p) = \frac{S_i^{init}}{p} \\ t_{i-1} \leq t \leq t_i & S_i(p) = \frac{S_i^{init}}{p} + \frac{Q_{i-1}(p)}{p} e^{-t_{i-1}p} \\ t \geq t_i & S_i(p) = \frac{S_{i0}}{p} + \frac{K_i Q_{i-1}(p)}{1+\tau_i p} e^{-t_i p} \end{cases} \quad (2)$$

## 2 Identification des paramètres du modèle réservoirs

vu l'importance de l'identification pour la détermination des modèles des processus, on s'intéresse dans cette partie d'étude à estimer les paramètres (le gain statique k, la constante du temps  $\tau$  et le temps de rétention) du modèle Réservoirs, on utilisant la méthode présentée dans la figure 3. Elle permet de calculer les paramètres en cherchant à minimiser un critère quadratique  $J$  représentant l'écart entre la sortie du modèle Richards ( $Y_S$ ) et la sortie du modèle Réservoirs( $Y_M$ ) qui peut se mettre sous la forme :

$$J(\Theta) = \sum_{k=1}^N e^2(k) = (Y_S - M\Theta)^T (Y_S - M\Theta) \quad (3)$$

où  $e$  :est le vecteur des erreurs d'observation,  $Y_S$  le vecteur d'observation,  $M$  matrice constituée par les vecteurs des entrées- sorties calculées par le modèle Richards,  $\Theta$  vecteur des paramètres à identifier,  $N$  horizon d'observation et  $k$  l'indice d'échantillon.

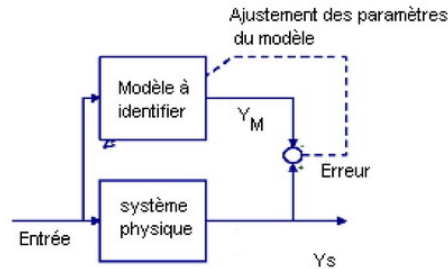


FIG. 3 – Schéma d'identification par la méthode de moindres carrés récursifs

### 3 Résultats et discussions

#### 3.1 Cas d'un débit constant

Sur la figure 4, on représente pour différents types de sol et avec un débit d'arrosage constant ( $q_e = 4L/h$ ) les variations du stock d'eau dans les trois tranches ( $H=30\text{cm}$ ) obtenues en appliquant les modèles de Réservoir (MRé) et de Richards (MRi). En fait, pour MRi, le stock d'eau est calculé en intégrant la fonction  $\theta(z, t)$  entre les côtes délimitant ces tranches. Pour MRé, on remarque qu'initialement la première tranche située entre ( $z=0$  et  $30\text{cm}$ ) se comporte comme un système intégrateur (c'est à dire que toute quantité d'eau provenant de la surface supérieure de la tranche s'accumule) et ce pour les différents types de sols étudiés. Ce comportement persiste durant le temps de rétention ( $tr_e=5\text{h}$  et  $tr_e=2\text{h}$ ) caractérisant respectivement les sols MC4 et DIERI. A noter que les valeurs du stock d'eau à ces instants sont respectivement  $S_{10}=8.8$  et  $4.2\text{ cm}^3$ . A partir de ce moment, la première tranche continue à se saturer tout en versant dans la deuxième. Ainsi, la première tranche se comporte comme un système de 1<sup>er</sup> ordre cependant, l'écoulement dans la 2<sup>ème</sup> tranche est traduit par l'introduction d'un terme exponentiel comme l'indique l'équation 2. Concernant, la comparaison des résultats entre les deux modèles, on note la bonne concordance surtout lors de l'établissement du régime permanent. Pour les premiers instants, les différences observées surtout pour la première tranche restent de l'ordre de 2%. Cette différence diminue pour les sols moins sableux.

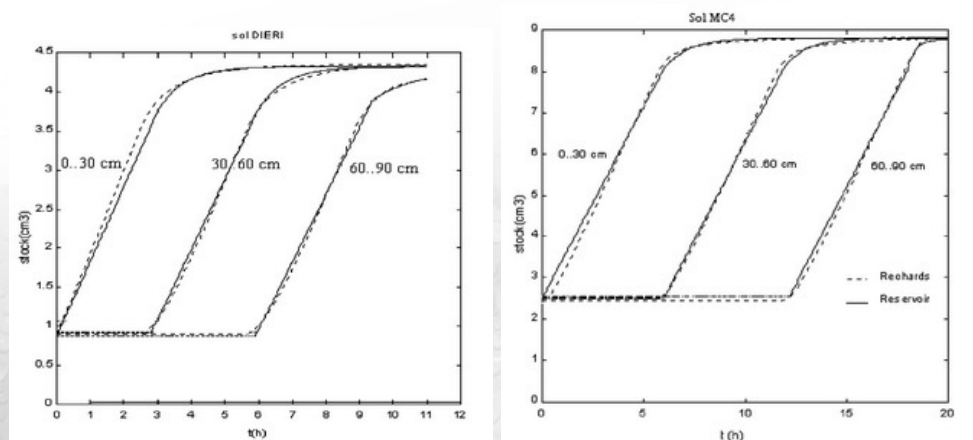


FIG. 4 – évolution temporelle du stock d'eau (S) pour les trois couches du sol MC4 et DIERI par les deux approches (Réservoir et Richards).

### 3.2 Cas d'un débit variable

Afin de tester les performances du modèle, on applique à la surface de la colonne du sol un débit variable dans le temps (figure 5). Le résultat trouvé montre que le modèle réservoirs suit l'évolution temporelle simulé par le modèle richards (figure 6). Globalement les résultats trouvés montrent que le modèle réservoirs donne des résultats satisfaisant en comparaison avec le modèle Richards. Quelques petites différences ont été signalées au départ du processus ou le stock calculé par le modèle Réservoirs est en retard par rapport au celui de Richards. Ceci peut être justifié par la nature de l'écoulement basé sur la remonté capillaire permettant aux pores de se remplir une fois que sa pression dépasse la valeur de seuil. De plus, le débit est relativement important par rapport à la conductivité hydraulique du milieu.

Une fois le temps dépasse 5h et lorsque le régime permanent commence à s'établir, les différences sont complètement disparues. Ainsi le temps de réponse du modèle est pratiquement nul.

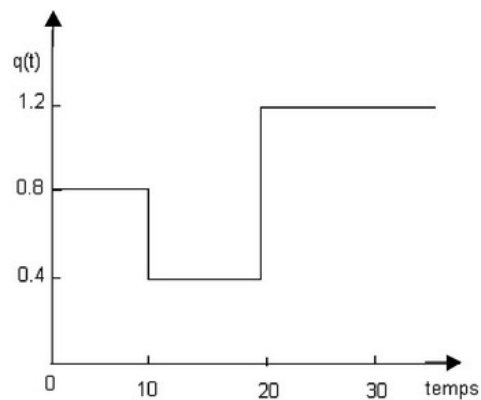


FIG. 5 – Evolution du débit appliqué.

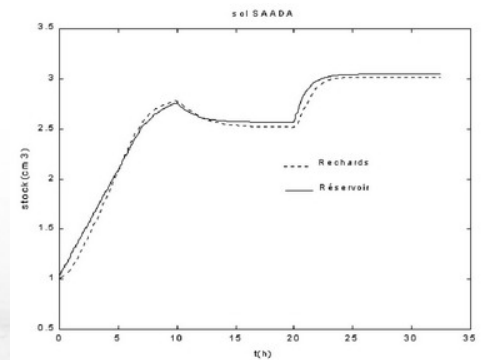


FIG. 6 – Evolution du stock d'eau par les deux approches : Réservoirs et Richards à la surface du colonne du sol SAADA.

## 4 Partie commande

La plupart des techniques de synthèse des systèmes de commande sont basées sur la connaissance du processus à commander et de son environnement. Or les phénomènes mis en cause sont généralement trop complexes pour que l'on puisse établir rigoureusement un modèle mathématique de leur comportement. Dans le domaine de la commande des processus physiques, l'objectif est

de déterminer le régulateur assurant au procédé régulé des performances désirées (ie : un réserve d'eau qui satisfait les besoins en eau des cultures sans gaspillage d'eau c'est- à dire de maintenir un stock maximal au voisinage de la réserve utile pratique  $S(\text{désiré}) \sim \text{RUP}$ ). Pour cela, nous somme tenus d'élaborer des lois de commande garantissant au système en boucle fermée les performances souhaitées. Dans cette section nous présentons les techniques de la commande utilisées. Dans un premier temps, on étudie le régulateur PID(Proportionnelle, Intégrale, Dérivée) et dans une seconde étape, on développe la formulation de l'algorithme de la commande adaptative.

## 4.1 Formulation mathématique et principe de calcul :

### 4.1.1 Les régulateurs P.I.D.

Les méthodes de synthèse paramétrique de La régulateur P.I.D. (Proportionnelle + Intégrale + Dérivée) régulateurs est basées sur la connaissance de la fonction de transfert du procédé (tranche du sol) [2]. D'autre méthodes sont basées sur les caractéristiques fréquentielles ou temporelles (modèles non-paramétriques) des procédés. Cependant l'action proportionnelle consiste à générer une action variant proportionnellement au signal d'erreur. Par contre l'objectif du contrôle par feed-back est d'annuler la différence entre la mesure et la consigne.

$$q(t) = q_{off} + K_C(S_c(t) - S(t)) \quad (4)$$

où :  $q(t)$  : le débit à la surface supérieure de la tranche du sol,  $q_{off}$  : la valeur d'offset,  $K_C$  : le gain du contrôleur,  $S_c(t)$  : le stock d'eau désiré dans le sol,  $S(t)$  : le stock d'eau réel du sol.

La valeur de  $q_{off}$  peut être ajustée du fait que lorsque  $S=S_C(q=q_{off})$ , elle correspond à la valeur nominale de l'action autour du point de fonctionnement. Après un changement de point de consigne ou une variation de charge, le régulateur proportionnel (P) devient incapable d'éliminer les erreurs enregistrées en régime permanent. En pratique, on peut éventuellement envisager une correction de cette erreur en portant manuellement  $q_{off}$  à  $q'_{off}$ , un nouveau point de fonctionnement est alors obtenu. Cependant, il est beaucoup plus simple d'utiliser un correcteur avec une action intégrale permettant automatiquement de ramener  $q_{off}$  à  $q'_{off}$ . A cause de cette limitation, le contrôleur proportionnel ne s'emploie que rarement surtout dans le cas où un offset peut être toléré. Dans ces conditions, la sortie du régulateur est de la forme :

$$q = q_{off} + \frac{1}{T_i} \int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau \quad (5)$$

où  $T_i$  est la constante intégrale de temps. L'ajustement de ce paramètre permet alors de doser l'effet de l'intégrale. Il représente aussi le temps nécessaire pour que la variation de la sortie du contrôleur soit égale à celle de l'amplitude d'une variation en échelon à l'entrée du même régulateur.

En combinant le régulateur P et le correcteur I, la sortie est donnée par :

$$q = q_{off} + K_c((\varepsilon(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau)) \quad (6)$$

et la fonction de transfert du (PI) est obtenue à l'aide de la transformée de Laplace par :

$$FT(p) = \frac{S(p)}{Q(p)} = K_c \left(1 + \frac{1}{T_i p}\right) \quad (7)$$

où  $S(p)$  et  $Q(p)$  sont respectivement le stock d'eau dans le sol et le débit d'eau à la surface en écriture Laplacienne.

Dans le cas échantillonné, le régulateur numérique ainsi défini permet de réaliser des opérations comme l'addition, la multiplication, la mémorisation et le décalage. Pour la discrétisation du régulateur (PI), on approche  $p$  (l'opérateur de dérivation) par  $1 - q^{-1}$ . Sous ces hypothèses, l'expression du débit est donnée Par :

$$q(t) = q(t-1) + K_c \left(1 + \frac{T}{T_i}\right) \varepsilon(t) - K_c \varepsilon(t-1) \quad (8)$$

#### 4.1.2 Calcul des paramètres du régulateur

Rappelons que le rôle d'un régulateur est de maintenir une grandeur donnée à une valeur de consigne. L'idéal est d'avoir un stock d'eau exactement égal à celui désiré. Malheureusement, ceci n'est pas toujours possible. En boucle fermée, la variable contrôlée doit suivre la consigne avec une certaine dynamique. Par ailleurs en régime permanent, la grandeur régulée s'écarte de la valeur souhaitée. C'est le comportement en régulation. Au moyen du choix des coefficients du régulateur, il est possible d'obtenir un comportement désiré en boucle fermée caractérisant les performances du système de régulation.

Dans un grand nombre de procédés, la réponse présente un certain retard ( $\tau$ ), (cas des systèmes apériodiques avec retard), la première solution consiste donc à tracer la tangente à la courbe en son point d'inflexion, puis de mesurer les paramètres  $\Theta$  et  $\tau$ .

En se référant aux travaux de Flavio et Aguilar (1995[10]), Ziegler et Nichols ont été les premiers à montrer comment on pouvait choisir les paramètres du (PI) à partir d'une réponse à un échelon du procédé. L'idée consiste à approcher la réponse du procédé à un échelon unitaire, que l'on suppose apériodique par l'expression suivante :

$$G(p) = \frac{K e^{-\Theta p}}{1 + \tau p} \quad (9)$$

En suite, Broïda a proposé une approche permettant de calculer la constante de temps et le retard par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \tau &= 2.8t_1 - 1.8t_2 \\ \Theta &= 5.5(t_2 - t_1) \end{aligned} \quad (10)$$

#### 4.1.3 Résultats et discussions

Dans cette section de résultats, on présente l'évolution du stock d'eau  $s(t)$  de la première tranche du sol de profondeur 30 cm. Considérée comme étant le premier réservoir, ses caractéristiques sont : le gain statique de valeur 0.42 et la constante de temps de 1.2h. Dans un second temps, on a calculé les paramètres de synthèse du régulateur à partir de l'équation 10 le coefficient de proportionnalité  $K_c$  et le temps d'intégration  $T_i$  sont égales respectivement 5 et 6.2h.

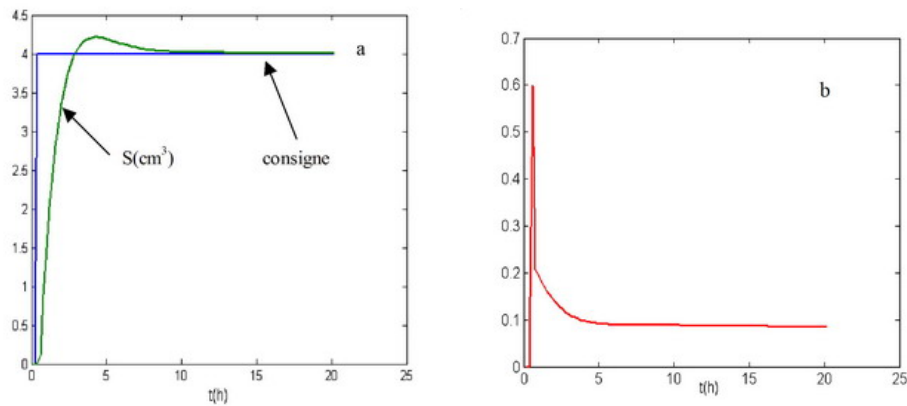


FIG. 7 – Variation du stock d'eau (a) et loi de la commande (b) pour une consigne constant.

Dans un premier temps, on désire maintenir le stock d'eau de cette tranche de sol à une valeur de  $4\text{cm}^3$  pendant une phase d'irrigation de durée 25 h. A noter que dans ces conditions, on a imposé une contrainte à l'entrée du sol ne fournissant qu'un débit inférieur ou égal à  $0.6\text{cm}^3/\text{h}$ . Selon les résultats de la figure 7a, on note que  $S(t)$  suit la consigne désirée surtout lorsque le régime permanent est atteint ( $t > 10h$ ). Dans la phase transitoire ( $0 < t < 10h$ ), on remarque que le stock d'eau calculé dans cette tranche dépasse la valeur de la consigne désirée. Ceci peut être justifié par l'effet des paramètres du régulateur et le type de régulateur choisie. De plus, le sol est encore relativement sec, ce qui impose une demande important d'eau par les zones les plus profondes. Pour confirmer ces différentes constatations, les résultats de la figure 7b montrent les fluctuations du débit d'eau à l'entrée du sol. Elles sont marquées par une augmentation rapide permettant le remplissage de cette tranche. Après, on assiste à une phase d'écoulement où le débit d'eau est à sa valeur maximale. Une fois que toutes les demandes d'eau sont satisfaites, un rabattement de la valeur du débit a été signalé. Lorsque le régime permanent est atteint, le débit appliqué se maintient alors à une valeur fixe. Ceci a permis de confirmer que la commande utilisée répond aux différentes contraintes imposées traduite par une meilleure régulation à l'entrée.

Pour tester la fiabilité du modèle proposé, on a appliqué la même loi de commande pour pouvoir suivre deux valeurs différentes de la consigne. La première est de  $2\text{cm}^3$  étendue jusqu'à l'instant  $t=6\text{h}$ . La seconde entre l'instant  $t=6\text{h}$  et  $t=16\text{h}$  est de  $6\text{cm}^3$ . Le but essentiel est de voir jusqu'à quelle limite cette commande s'adapte aux différentes situations comme une pluie soudaine ou une évaporation très intensive nécessitant ainsi soit une faible ou une forte demande d'eau donc un débit bien défini. Ainsi, les résultats de la figure ??a, montrent que le stock d'eau calculé suit bien la consigne souhaitée. A noter que dans ce cas, la vanne est réglée pour ne pas dépasser  $0.6\text{cm}^3/\text{h}$ . Ainsi selon les résultats de la figure 8b, la variation de  $q(t)$  montre le travail fournit par le régulateur pour répondre aux différentes exigences imposées par la consigne. Ce qui renforce davantage la bonne utilisation du présent modèle.

## 4.2 Formulation de l'algorithme de commande predictive

La philosophie de la commande prédictive généralisée se base sur quatre grandes idées : création d'un effet anticipatif par exploitation de la trajectoire à suivre dans le futur, définition d'un modèle numérique de prédiction, minimisation d'un critère quadratique à horizon fini, principe de l'horizon fuyant [6], [7], [8].

Le modèle numérique de prédiction est classiquement défini par fonction de transfert entrée/sortie.

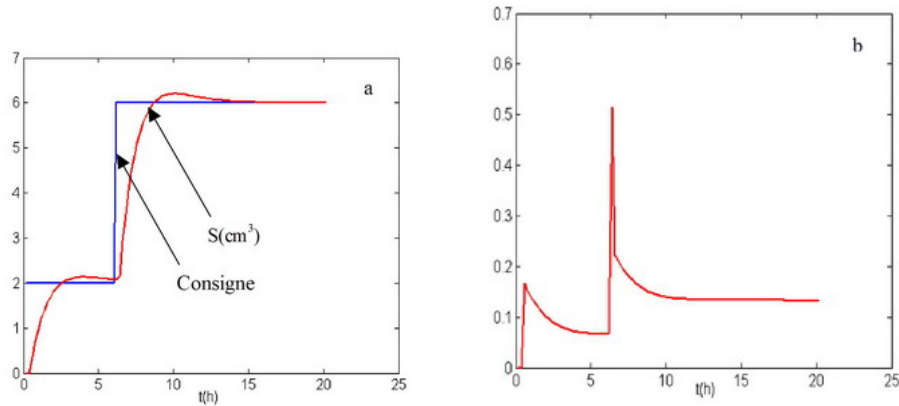


FIG. 8 – Variation du stock d'eau (a) et loi de la commande (b) pour une consigne variable

Le modèle est représenté sous forme CARIMA (Controlled AutoRégressive Integrated Moving Average).

$$A(q^{-1})y(t) = q^{-d}B(q^{-1})u(t) + C(q^{-1})\frac{e(t)}{\Delta} \quad (11)$$

$\Delta = 1 - q^{-1}$ ,  $u(t)$  et  $y(t)$  sont respectivement l'entrée et la sortie du modèle,  $e(t)$  est un bruit blanc centré,  $q^{-1}$  est l'opérateur retard et  $A(q^{-1})$ ,  $B(q^{-1})$  et  $C(q^{-1})$  sont des polynômes définis par

$$\begin{aligned} A(q^{-1}) &= 1 + a_1q^{-1} + a_2q^{-2} + \dots + a_naq^{-na} \\ B(q^{-1}) &= b_0 + b_1q^{-1} + b_2q^{-2} + \dots + b_nbq^{-nb} \\ C(q^{-1}) &= 1 \end{aligned} \quad (12)$$

la commande GPC consiste à appliquer une séquence de commande minimisant la fonction coût définie par :

$$J(N_1, N_2, N_u) = E \left\{ \sum_{j=N_1}^{N_2} \delta(j) [y(t+j/t) - w(t+j)]^2 + \sum_{j=1}^{N_u} \lambda(j) [\Delta u(t+j-1)]^2 \right\} \quad (13)$$

où  $E$  représente l'espérance mathématique,  $y(t+j/t)$  la prédiction optimale à  $j$ -pas de la sortie du système.  $N_1$ ,  $N_2$  et  $N_u$  sont l'horizon initial, de prédiction et de commande respectivement. Les séquences  $\delta(j)$  et  $\lambda(j)$  sont les séquences de pénalisation et  $w(t+j)$  la trajectoire de référence future. Dans la formulation générale  $\delta(j)$  est prise égale à 1 et la séquence  $\lambda(j)$  est constante [18].

Afin de minimiser la fonction coût (II-10), on considère l'équation diophantine suivante :

$$\begin{aligned} 1 &= E_j(q^{-1})\Delta A(q^{-1}) + q^{-j}F_j(q^{-1}) \\ 1 &= E_j(q^{-1})\tilde{A}(q^{-1}) + q^{-j}F_j(q^{-1}) \end{aligned} \quad (14)$$

où les polynômes  $E_j$  et  $F_j$  ayant respectivement les degrés  $j-1$  et  $na$ . Considérant l'équation

(II-11) et si l'équation (II-8) est multipliée par  $q^{-j}F_j(q^{-1})$  on obtient :

$$y(t+j) = F_j y(t) + E_j B(q^{-1}) \Delta u(t+j-d-1) + E_j e(t+j) \quad (15)$$

avec :  $G_j(q^{-1}) = E_j(q^{-1})B(q^{-1})$

la présentation polynomial de la séquence de prédictions optimales à j-pas s'écrit comme :

$$Y = GU + Fy(t) + G' \Delta u(t-1) \quad (16)$$

$$Y = \begin{bmatrix} \hat{y}(t+N_1) \\ \hat{y}(t+N_1+1) \\ \hat{y}(t+N_2) \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} \Delta u(t) \\ \Delta u(t+1) \\ \Delta u(t+N_2-N_1) \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} g_{N_1-d-1} & \dots & g_0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ g_{N_1-d-1} & \dots & g_1 & g_0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ g_{N_2-d-1} & g_{N_2-d-2} & \dots & \dots & \dots & g_{N_2-N_u} & g_{N_2-N_u-1} \end{bmatrix}$$

## 5 Validation et expérimentation du modèle réservoirs

Pour valider davantage notre modèle, des tests de comparaison ont été effectués en faisant appel à des résultats expérimentaux (figure 8) réalisés à l'aide d'une station météorologique et une série de TDR installées dans des profondeurs différentes. Cette étude effectuée dans le domaine R3 sidi Rahale Marrakech, doté d'un sol limon argileux, caractérisé par une conductivité de saturation  $k_S = 1.6 \text{ cm/h}$  et de humidité de saturation  $\theta_S = 0.45$ . Globalement, les résultats montrent les mêmes tendances justifiées par des valeurs égales en termes des stocks initiaux  $S_{io}$  et au régime permanent  $S_{sat}$ . De plus, on note les mêmes caractéristiques concernant le temps de rétention et ce en considérant une première tranche située entre 5 et 15 cm et une deuxième tranche située entre 15 et 30 cm. Cependant, le décalage enregistré entre les résultats (inférieur à 10% dans le cas le plus défavorable) est dû essentiellement à l'hétérogénéité du sol étudié.

## Références

- [1] Aguilar Martin J. (1996) Knowledge based real time supervision. Tempus Modify Workshop, Budapest (Hungaria)
- [2] K.J. Astrom, U. Borisson, L. Ljung and B. Witenmark, " Theory and applications of self-tuning controllers "., Automatica 20(5) pp. 645-651, 1977
- [3] Bel G. et V. Sabarthez, "Optimisation de l'utilisation par l'agriculture des réserves d'eau à partir de la modélisation du système eau-sol-culture", Office national d'études et de recherches aérospatiales., Annexe Technique DGRST/DERA n° 2/7139.
- [4] Bouloutas, E. T. ,1989, "Improved numerical methods for modeling flow and transport processes in partially saturated porous media", Ph.D. thesis, Dep. Civ. Eng., Mass. Inst. Of Technol., Cambridge.
- [5] Brooks, R.H., and A.T. Corey, Hydraulic properties of porous media, Colorado University, Fort Collins, 1964

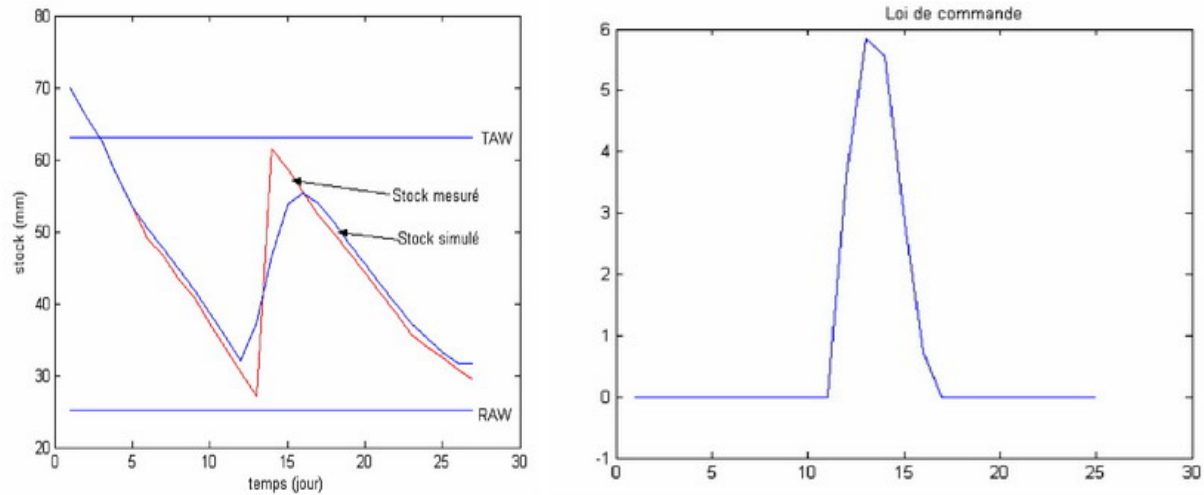


FIG. 9 – Validation du modèle (a) et la loi de commande.

- [6] Clarke, D.W., C. Mohtadi et P.S. Tuffs (1987). Generalized Predictive Control, Part I "The Basic Algorithm", Part II "Extensions and Interpretation". In : *Automatica*, Vol. 23-2, pp. 137-160, Mars.
- [7] Clarke, D.W., C. Mohtadi et P.S. Tuffs (1987). Properties of Generalized Predictive Control. In : *Proceedings 10th World Congress IFAC'87*, Vol. 9, pp. 63-74, Munich, Juillet.
- [8] Clarke, D.W. (1988). Application of Generalized Predictive Control to Industrial Processes. *IEEE Control Systems Magazine*, pp. 49-55, Avril.
- [9] Firdaouss M., 1985, Contribution à la caractérisation numérique et expérimentale des effets d'hystérésis dans les milieux poreux non saturés. Applications à l'étude des écoulements cycliques en configuration mono et bidimensionnelle. Thèse de Doctorat d'Etat, Université Pierre et Marie Curie.
- [10] N.J. Flavio et J.M. Aguilar, " Modélisation et Supervision de Procédés Mixtes (états continus et discrets) "., Rapport d'Automatique Informatique Industrielle. LAAS, CNRS de Toulouse, France. 1995.
- [11] Haverkamp, R., and M. Vauclin. , 1983, "Résolution de l'équation de l'infiltration de l'eau dans le sol. Approches analytiques et numériques", Thèse de Doctorat ès Sciences, Université de Grenoble,.
- [12] Hills R. G. I. Porro, D. B. Hudson, and P. J. Wierenga. ,1989., "Modelling one-dimensional infiltration into very dry soils, 1, Model development and evaluation", *Water Resour. Res.*, vol (25) N (6).
- [13] Hornberger, G. M., and I. Remson. , 1969, "Numerical studies of a composite soil moisture groundwater system", *Water Resour. Res.*, vol (5) N (4).
- [14] Mualem, Y., A new model for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated porous media, *Water Resour. Res.*, 12, 513-521, 1976.
- [15] Nielsen, D.R., M. Th. Van Genuchten and J. W. Biggar, Water flow and solute transport processus in the unsaturated zone. *Water Resources Research*, Vol. 22, No. 9, Pages 89S-108S, August 1986.
- [16] Van Genuchten, M. Th. A closed form equation for predicting the hudraulic conductivity of unsaturated soils. *Soil Sci. Soc. Am. J.*, 44(5), 892-898, 1980.
- [17] Van Genuchten, M. Th., and D.R Nielsen, on describing and predicting the hydraulic properties of Ann. Geo-phs., 3, 615-628, 1985

- [18] Zammit C., Analyse et évolution des paramètres des caractéristiques hydrodynamiques des sols. Prédiction par un modèle analytique à base physique à partir de données texturales, discipline : géophysique, géochimie, géomécanique, Université Joseph Fourier Grenoble1, Grenoble, 1999.
- [19] Zelazney, M., F. Giri, et T. Bennani "Système asservis, Commande et régulation", 425 pp., *Wallada, Casablanca*, 1991.